



TITLE:

Distance polynomialについて(グラフ理論とその応用)

AUTHOR(S):

梶岡, 肇

CITATION:

梶岡, 肇. Distance polynomialについて(グラフ理論とその応用). 数理解析研究所講究録 1985, 566: 36-47

ISSUE DATE:

1985-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99121>

RIGHT:

Distance polynomial について

大阪電通大・工 梶岡 肇 (Hajime Kajioaka)[†]

G を点集合 $V(G) = \{1, \dots, n\}$ を持つ n 点連結グラフとする。2 点 i と j の距離を d_{ij} とし、 d_{ij} を i, j 要素とする n 次行列 $D(G)$ を G の距離行列という。 $D(G)$ の固有多項式 $\det(xI - D(G))$ を G の距離多項式 (distance polynomial) と呼び、 $\Delta(G; x)$ で表わす。 G の隣接行列 $A(G)$ の固有多項式として定義される G の固有多項式 $\phi(G; x)$ については多くの研究がある (専門書として [1]、[2] が出版されている) が、距離多項式の一般的な性質はあまり知られていない。ここでは、距離多項式の持ちうる因数、すなわち $D(G)$ の固有値 (これを G の距離固有値という) に関していくつかの結果を述べる。

[†] 現在：大阪府立香里丘高等学校勤務

1. グラフの自己同型群と多項式

m を $V(G) \times V(G)$ 上の複素数値関数で G の自己同型群 $I(G)$ により不変なもの、つまり任意の $i, j \in V(G)$ と $\sigma \in I(G)$ に対して $m(i, j) = m(i^\sigma, j^\sigma)$ となるものとする。 $m(i, j)$ を m_{ij} と書いて、 m_{ij} を i, j 要素とする n 次行列 $M = (m_{ij})$ を定める。 $A(G)$ や $D(G)$ の要素も $I(G)$ により不変であるから以下で述べる一般論が適用できる。なお、以下で行列 M に対し M の固有多項式を $\phi(M; x)$ で表わす。

$I(G)$ による $V(G)$ の軌道を V_1, \dots, V_r とすると、 m の性質からわかるように

$$m_{k\lambda}^* = \sum_{p \in V_k} m_{p\lambda} \quad (p \in V_k)$$

は p の選び方によらない。そこで、 r 次行列 $M^* = (m_{k\lambda}^*)$ を定義し、 $\phi(M^*; x)$ を $\phi^*(M; x)$ と書く。

定理 1 $\phi^*(M; x)$ は $\phi(M; x)$ の因数である。

証明 本質的に [2] の Th. 4.7 と同じである。 G の点の番号を付けかえてもよいので、まず各軌道から 1 個ずつ代表を選んで $1, \dots, r$ とする。次に、 V_1 の残りの点、 \dots 、 V_r の残りの点を順に $r+1, \dots, n$ とする。行列 $xI - M$ の第 λ 列 ($\lambda = 1, \dots, r$) に、第 $(r+1)$ 列以降で V_λ の点に対応するすべての列を加える。次に第 k 行 ($k = 1, \dots, r$) を、第 $(r+1)$ 行以降で V_k の点に対応するすべての行から引く。すると

$$\left(\begin{array}{c|c} xI - M^* & * \\ \hline 0 & xI - M^c \end{array} \right)$$

という形になる。ここで $\phi(M^c; x)$ を $\phi^c(M; x)$ と書くと、
 $\phi(M; x) = \phi^*(M; x) \phi^c(M; x)$ を得る。 \square

なお、 $\Gamma(G)$ が単位元だけの群ならば M^c は存在しない。

例 1 後述のように、 $\Delta(K_{1,k}; x) = (x^2 - 2(k-1)x - k)(x+2)^{k-1}$ であるが、 $\Gamma(K_{1,k})$ は k 次の対称群に同型で、容易にわかるように $\Delta^*(K_{1,k}; x) = x^2 - 2(k-1)x - k$ 、 $\Delta^c(K_{1,k}; x) = (x+2)^{k-1}$ である。ただし $\Delta^*(G; x)$ とは $\phi^*(D(G); x)$ のことである。また $\Delta^c(G; x)$ も同様。

次に、 Σ を $\Gamma(G)$ の部分群とし、 Σ による $V(G)$ の軌道分解から作った $\phi^*(G; x)$ を $\phi_\Sigma^*(G; x)$ と書き、 $\phi_\Sigma^c(G; x)$ も同様に定義する。また、 H を G の部分グラフとし、 H に属さない点に対応する行と列を M から除去してできる行列を M_H と書く。 A_H と $A(H)$ はつねに等しいが、部分グラフ内では距離が変わるかも知れないので D_H と $D(H)$ は一般に異なる。そこで、次の有用な定理を証明する。

定理 2 $\Gamma(G)$ の部分群 Σ と G の部分グラフ H が次の条件

(1)、(2) を満たせば、 $\phi_\Sigma^c(M(H); x) = \phi_\Sigma^c(M; x)$ 、すなわち $\phi_\Sigma^c(M(H); x)$ は $\phi(M; x)$ の因数である。

(1) H に属さない点はすべて Σ によって固定され、また Σ は $V(H)$ 上に置換群として作用する。

(2) $M_H = M(H)$ 。

証明 $xI - M$ と $xI - M(H)$ において、軌道の代表でない点 (定理 1 の証明参照) に対応する行と列からなる部分行列が一致しているので、定理のなりたつことは明らか。 \square

定理 2 はあたりまえの結果のように思われるが、距離多項式 (実際には $\Delta^c(G; x)$) がどんな因数を持つかについて多くの情報を与える。応用例をいくつかあげる。

例 2 C_5 (5-閉路) の自己同型群は位数 10 の 2 面体群であるから、 $\Delta^*(C_5; x) = x - 6$, $\Delta^c(C_5; x) = (x^2 + 3x + 1)^2$ 。一方、 C_5 の 1 点を固定する部分群 Σ に対して、 $\Delta_\Sigma^c(C_5; x) = x^2 + 3x + 1$ となる。よって、図 1 のグラフの距離多項式はいずれも $x^2 + 3x + 1$ を因数に持つ。

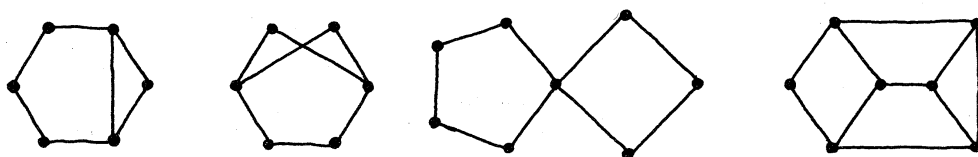


図 1

例 3 グラフ G の k 個の点 v_1, \dots, v_k が同じ近傍を持つとする。 v_1, \dots, v_k 以外の点をすべて固定する部分群と、 v_1, \dots, v_k およびそれらのすべてと隣接している点から誘導され

る部分グラフを考えると、次のことがわかる。 v_1, \dots, v_k などの2点も隣接しているか、または隣接していないかによって、 $\Delta(G; x)$ は $\Delta^c(K_k; x) = (x+1)^{k-1}$ 、または $\Delta^c(K_{1,k}; x) = (x+2)^{k-1}$ を因数に持つ。このことは、 $k=2$ の場合には $D(G)$ をながめるとすぐわかる ([5], Proposition 6)。

例 4 図 2 のようなグラフの距離多項式は、それぞれ下に書いてある因数を持つ。このことは、 $D(G)$ をながめただけではわからない。

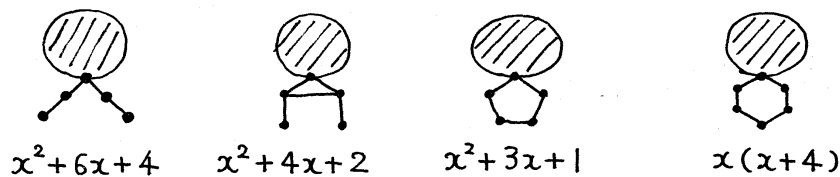


図 2

なお、今のところ $\Delta^*(G; x)$ の一般的な性質はほとんど何もわかっていない。

2. 直径 2 のグラフの距離多項式

次に、距離多項式独自の性質を考えるが、一般的に調べるのは非常に困難である。ここでは、直径 2 のグラフに対する距離多項式と固有多項式の関係について述べる。

グラフ G の直径が 2 ならば、 $D = D(G)$ と $A = A(G)$ に対して $D = 2J - 2I - A$ という関係がなりたつ。ここで J はすべて

の要素が 1 の行列を表わす。これだけでは距離多項式と固有
多項式の関係は一般にはわからないが、正則グラフに対して
は次の結果がある。

定理 3 G が直径 2 の n 点 d 次正則グラフで

$$\phi(G; x) = (x-d) \prod_{i=1}^{n-1} (x-\lambda_i)$$

ならば

$$\Delta(G; x) = (x-2n+d+2) \prod_{i=1}^{n-1} (x+\lambda_i+2).$$

証明 A の d に対する固有ベクトルは \mathbf{j} (すべての要素が
1 のベクトル) であることと、 d 以外の固有値に対する固有
ベクトル \mathbf{x} は \mathbf{j} と直交することに注意して、 $D\mathbf{j}$ と $D\mathbf{x}$ を計
算すれば容易に得られる。 \square

一般には次のことがなりたつ。

定理 4 G が直径 2 ならば

$$\Delta^c(G; x) = (-1)^{\varepsilon} \phi^c(G; -x-2) \quad (\varepsilon = \deg \phi^c(G; x)).$$

証明 定理 1 の証明において、 M^c の要素は $p, p' \in V_k$
($1 \leq p \leq r, r+1 \leq p' \leq n$)、 $q' \in V_l$ ($r+1 \leq q' \leq n$) なる p, p', q'
により $m_{pq'} - m_{pq'}$ という形をしている。これを A^c と D^c
にあてはめて $a_{pq'} - a_{pq'}$ と $d_{pq'} - d_{pq'}$ を比較すると、非対角
要素については $d_{pq'} - d_{pq'} = -(a_{pq'} - a_{pq'})$ 、また対角要素に
ついては $-d_{pp'} = a_{pp'} - 2$ となることがわかる (D^c の要素
のとりうる値によって場合分けして考える)。従って、 D^c

$= -A^c - 2I$ となるから定理が示される。 \square

定理 4 で、特に G が vertex transitive ならば定理 3 の式を得るが、定理 3 自体は G が正則でありさえすれば成立するというわけである。定理 4 を応用すると、直径が 2 で自己同型群と固有多項式が既知のグラフに対して、距離多項式が容易に求められることが多い。

例 5 $(n+1)$ 点 wheel $W_n = C_n + K_1$ の自己同型群は位数 $2n$ の 2 面体群に同型で、 $V(W_n)$ の軌道は次数 3 の n 個の点 (V_1 とする) と次数 n の 1 個の点 (V_2 とする) である。また W_n は直径が 2 である。

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix}, \quad D^* = \begin{pmatrix} 2(n-2) & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$$

で、また

$$\phi(W_n; x) = (x^2 - 2x - n) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right)$$

である ([7])。従って定理 4 より

$$\Delta(W_n; x) = (x^2 - 2(n-2)x - n) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x + 2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 2 \right)$$

を得る。同様に、完全 2 部グラフ $K_{m,n}$ 、 K_n から辺を 1 本除去したグラフ $K_n - e$ について

$$\phi(K_{m,n}; x) = x^{m+n-2} (x^2 - mn)$$

$$\phi(K_n - e; x) = x(x+1)^{n-3} (x^2 - (n-3)x - 2(n-2))$$

より次を得る。

$$\Delta(K_{m,n}; x) = (x+2)^{m+n-2} (x^2 - 2(m+n-2)x + 3mn - 4m - 4n + 4)$$

$$\Delta(K_n - e; x) = (x+2)(x+1)^{n-3} (x^2 - (n-1)x - 2)$$

$\Delta(K_{m,n})$ は [5] でも計算されている。

なお、蛇足ではあるが閉路の距離多項式を計算したのでここに記しておく。

$$\Delta(C_n; x) = \begin{cases} x^{m-1} (x-m^2) \prod_{\lambda=1}^{m/2} \left(x+2 / \left(1 - \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{m} \right) \right)^2 \\ x^{m-1} (x-m^2) (x+1) \prod_{\lambda=1}^{(m-1)/2} \left(x+2 / \left(1 - \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{m} \right) \right)^2 \\ (x-m(m+1)) \prod_{k=1}^{2m} \left(x + (1 - \cos \frac{2k\pi}{2m+1}) / (1 - \cos \frac{2k\pi}{2m+1}) \right) \end{cases}$$

3通りに分けてあるが、それぞれ $n=2m$ (m は偶数)、 $n=2m$ (m は奇数)、 $n=2m+1$ の場合である。従って $\det D(C_{2m}) = 0$ ([5] でも示されている)、 $\det D(C_{2m+1}) = m(m+1)$ がわかる。 C_n の距離固有値は、巡回行列の固有値に関するよく知られた公式から計算できる。

3. 距離多項式とグラフ同型性

固有多項式が同じなのに同型でないグラフの組を cospectral という。たとえば図3、図4はそれぞれ連結で位数最小、木で位数最小の cospectral なグラフの対である。他にもいろいろな例がある ([2])。

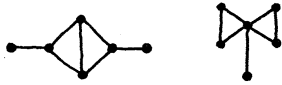


図 3

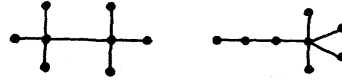


図 4

一方、距離多項式が同じなのに同型でないグラフの組を距離 cospectral と呼ぶが、そのような組の具体例はあまり見つかっていない。定義からもわかるように、固有多項式に比べて距離多項式はグラフの構造に関してより詳細な情報を含んでいるはずだが、現在のところ、その情報を解読することが不十分にしかできない。位数最小の距離 cospectral な木の対は図 5 に示したもので（位数 17）、B.D. McKay により発見された ([6])。

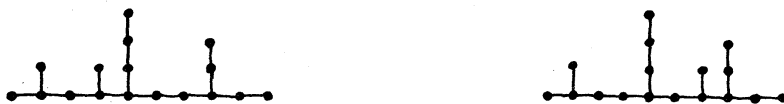


図 5

ところが、位数最小の距離 cospectral なグラフの対はまだ知られていない。強正則 (strongly regular) グラフ (たとえば [2] の chap. 3) は直径 2 の正則グラフだから、パラメータが等しくて同型でない (つまり cospectral な) 強正則グラフは定理 3 から距離 cospectral であることがわかる。そのよう

な対で位数最小のものは、図 6 に示したように $K_{4,4}$ の線グラフ $L(K_{4,4})$ と Shrikhande グラフ S である ([8])。

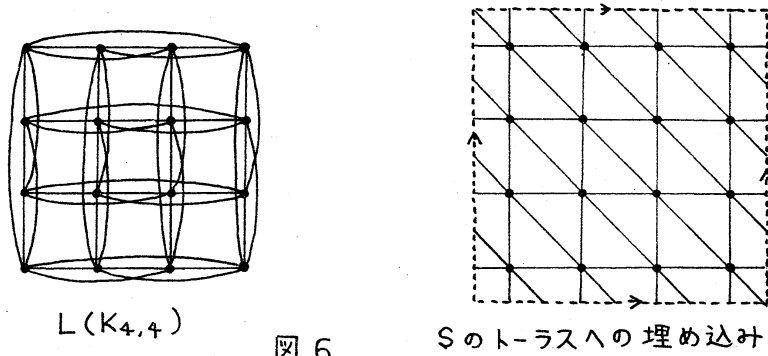


図 6

S のトラスへの埋め込み

実際、 $\Delta(L(K_{4,4}); x) = \Delta(S; x) = x^9(x-24)(x+4)^6$ である。講演では、これが現在知られているうちで位数最小の距離 cospectral なグラフの対であると述べたが、その後両者から 1 点ずつ除いてできるグラフ (それぞれ L' 、 S' とする) も距離 cospectral であることが判明した。実際に計算してみると、 $\Delta(L'; x) = \Delta(S'; x) = x^8(x+4)^5(x^2-20x-54)$ である。 L' と S' の非同型性は、次数 5 の 6 個の点から誘導される部分グラフが前者では 2 個の K_3 、後者では C_6 であることからわかる。なお、 $L(K_{4,4})$ と S はどちらも vertex transitive であるから、どの点を除いても同じことである。

4. むすび

距離多項式に関しては未解決の問題が数多くある。ここで

述べたことは主として距離多項式の因数に関するものであったが、距離多項式の係数とグラフの構造との関係はどうかという問題も考えられ、木についてはかなりのことがわかっていて ([4])。また、距離多項式の定数項、つまり $\det D(G)$ と G のブロック分解との間に興味深い関係のあることが示されている ([3])。その他の問題としては、たとえばある対称性をもつグラフの構造決定や非存在の証明などに距離多項式を使うと、普通行われているような固有多項式を使う方法よりも、一層精密な結果の得られることが期待される。

なお、今回の結果は (特に定理 2 と定理 4)、6 点までのすべての連結グラフや、その他多くのグラフについて固有多項式と距離多項式の計算およびその有理数体上の因数分解をマイコンにより行い、結果をいろいろながめて帰納的に得たものである。

最後になりましたが、有益な助言をいただいた関西グラフ理論セミナーの方々に感謝致します。

References

- [1] N. L. Biggs , "Algebraic Graph Theory" , Cambridge University Press , 1974 .
- [2] D. M. Cvetković , M. Doob and H. Sachs , "Spectra of Graphs" , Academic Press , 1980 .
- [3] R. L. Graham , A. J. Hoffman and H. Hosoya , On the distance matrix of a directed graph , J. Graph Theory 1 (1977) , 85-88 .
- [4] R. L. Graham and L. Lovász , Distance matrix polynomials of trees , Advances in Math. 29 (1978) , 60-88 .
- [5] P. Křivka and N. Trinajstić , On the distance polynomial of a graph , Aplikace Matematiky 28 (1983) , 357-363 .
- [6] B. D. McKay , On the spectral characterization of trees , Ars Comb. 3 (1977) , 219-232 .
- [7] A. J. Schwenk and R. J. Wilson , On the eigenvalues of a graph , in "Selected Topics in Graph Theory (eds. L. W. Beineke and R. J. Wilson)", Academic Press , 1978 .
- [8] S. S. Shrikhande , The uniqueness of the L_2 association scheme , Ann. Math. Stat. 30 (1959) , 781-798 .